

APLICACION DEL M.E.C. AL ESTUDIO DE SISTEMAS ELASTICOS CON SIMETRIA AXIAL

S. Gomez Lera, M. Doblaré, E. Alarcón

Cátedra de Estructuras E.T.S.I.I. U.P.M.

Resumen.— En este artículo se presenta la aplicación del Método de los Elementos de Contorno a la determinación del campo de desplazamientos y tensiones de sistemas axisimétricos en Régimen elástico. Desarrollando asimismo, un procedimiento para la determinación de los coeficientes de las matrices de influencia que aparecen en el tratamiento numérico del problema.

INTRODUCCION

El estudio del estado tensional del sistema axisimétrico es de obvio interés en Ingeniería, pudiendo citarse entre otras las siguientes aplicaciones:

- Estudio de vasijas de todo tipo, y cobrando plena actualidad las vasijas de los reactores nucleares.
- Efecto de grietas y entallas.
- Efecto de la colocación de zunchos de pretensado en depósitos de hormigón armado, etc.

El tratamiento numérico de este tipo de problemas se produce como consecuencia de la dificultad de encontrar soluciones cerradas para las ecuaciones de campo que definen el problema, ecuaciones que aunque establecidas hace tiempo, sólo han sido resueltas en casos particulares.

La ventaja de la utilización del M.E.C., frente a los métodos de dominio, se pone de manifiesto en el estudio de este tipo de sistemas ya que la consideración de una malla monodimensional es suficiente para representar la discretización del contorno, produciéndose una considerable reducción del tiempo de cómputo.

FORMULACION MATEMATICA Y DESARROLLO DEL ALGORITMO DE CALCULO

La base de partida del método es la Identidad de Somigliana.

$$u_i(x) = \int_{\partial\Omega} U_{ik}(x,y) t_i(y) ds_y - \int_{\partial\Omega} T_{ik}(x,b) u_i(b) ds_y + \int_{\Omega} U_{ik}(x,b) x_i(y) ds_y \quad (1)$$

La resolución de la ecuación integral (1) lleva consigo la determinación de los tensores  $U_{ik}(x,y)$  y  $T_{ik}(x,y)$  núcleos de la citada ecuación que representan los desplazamientos y tensiones en un punto  $y$  en la dirección  $k$  cuando se aplica una carga puntual unidad en el punto  $x$  en la dirección  $i$ .

Para el análisis de sistemas axisimétricos las cargas corresponden a las indicadas en la figura 1.

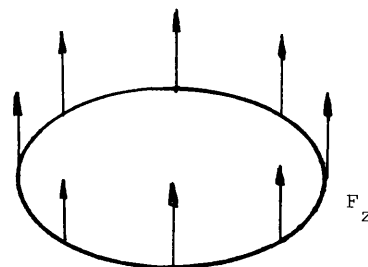


Fig. 1

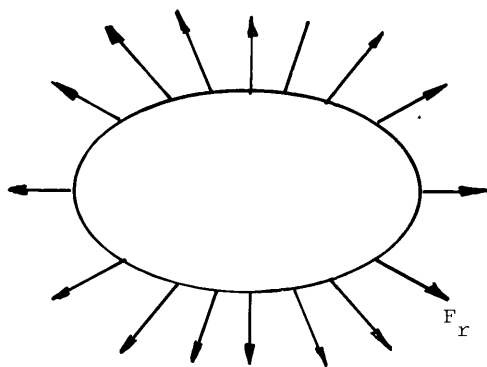


Fig. 1

El tensor  $U_{ik}(x,y)$  corresponde por tanto a la solución fundamental del operador elástico, pudiendo encontrarse en Cruse 6; y sus componentes en términos de las funciones asociadas de Legendre de orden cero pueden expresarse mediante

$$\begin{aligned}
 U_{rr} &= \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu)\sqrt{Rr}} (3-4\nu) Q_{1/2} + \\
 &+ \frac{(Z-z)^2}{Rr} \frac{dQ_{1/2}}{d\gamma} \\
 U_{rz} &= \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu)\sqrt{Rr}} \frac{1}{2} Q_{1/2} - \\
 &- \left(\gamma - \frac{r}{R}\right) \frac{dQ_{1/2}}{d\gamma} \\
 U_{rz} &= \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu)r\sqrt{Rr}} \frac{1}{2} Q_{-1/2} + \\
 &+ \left(\gamma - \frac{r}{R}\right) \frac{dQ_{-1/2}}{d\gamma} \\
 U_{zz} &= \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu)\sqrt{Rr}} (3-4\nu) Q_{-1/2} - \\
 &- \frac{(Z-z)^2}{Rr} \frac{dQ_{-1/2}}{d\gamma}
 \end{aligned}
 \quad (2)$$

siendo

$$\gamma = 1 + \frac{(R-r)^2 + (Z-z)^2}{2Rr} \quad (3)$$

y donde  $(R,Z)$  son las coordenadas del punto  $x$  de aplicación de la carga y  $(r,z)$  las coordenadas del punto de campo  $y$ .

El tensor  $T_{ik}$ , se obtiene aplicando la ecuación de equilibrio en el contorno

$$\begin{aligned}
 T_{rr} &= \sigma_{rrr} n_r + \sigma_{rzz} n_z \\
 T_{rz} &= \sigma_{rzz} n_r + \sigma_{zzr} n_z \\
 T_{\theta r} &= 0 ; T_{\theta z} = 0
 \end{aligned}
 \quad (4)$$

$$T_{rz} = \sigma_{rrz} n_r + \sigma_{rzz} n_z$$

$$T_{zz} = \sigma_{rzz} n_r + \sigma_{zzz} n_z$$

y las componentes del tensor  $\sigma_{ijk}$  aparecerán como consecuencia de la aplicación de los operadores elásticos al tensor  $U_{ik}$ , pudiendo encontrarse su expresión en 7.

Cuando el punto  $x(R,Z) \rightarrow y(r,z)$  según la expresión (3) tendremos que  $\gamma \rightarrow 1$  y las funciones de Legendre  $Q_{1/2}(\gamma)$  y  $Q_{-1/2}(\gamma) \rightarrow \infty$  véase 8; es necesario, en este caso, considerar la integral de volumen de la ecuación (1) en el sentido del valor principal de Cauchy.

Una vez calculados los tensores  $U_{ik}$  y  $T_{ik}$ , la ecuación que nos permite obtener las tensiones en cualquier punto interno puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= \int_{\partial\Omega} D_{ijk} t_k ds_y - \int_{\partial\Omega} S_{ijk} u_k ds_y + \\
 &+ \int_{\Omega} D_{ijk} x_b d\Omega_y
 \end{aligned}
 \quad (5)$$

La ecuación integral que nos permite determinar los desplazamientos en cualquier punto del contorno se obtendrá de (1) al hacer tender el punto  $x$  a la superficie  $\partial\Omega$ , lo que implica que las integrales extendidas a  $\Omega$  que no eran singulares cuando el punto se encontraba en el interior del dominio, sean singulares al igual que ocurría con la integral de volumen. Extendiéndose entonces la identidad de Somigliana al contorno del dominio  $y$ , considerando de nuevo las integrales en el sentido del valor principal de Cauchy, la ecuación integral correspondiente al cálculo de los desplazamientos en el contorno quedará.

$$\begin{aligned}
 (\delta_{ik} - C_{ij}) u_i &= \int_{\partial\Omega} U_{ik} t_i ds_y - \\
 &- \int_{\partial\Omega} T_{ik} u_i ds_y + \\
 &+ \int_{\Omega} U_{ik} x_i d\Omega_y
 \end{aligned}
 \quad (6)$$

La ventaja que el M.E.C. aporta en cuanto que reduce las integrales al contorno, queda aparentemente eclipsada por la aparición de una integral extendida al dominio, problema que se soslaya siempre y cuando dichas fuerzas deriven de un potencial (casos de peso propio, fuerza centrífuga, fuerzas termoelásticas, etc.).

#### DISCRETIZACION Y TRATAMIENTO DE LA ECUACION INTEGRAL

En lo que se refiere al tratamiento numérico de la ecuación integral y siguiendo una representación análoga a la del M.E.F. se han utilizado elementos anulares superficiales de generatriz rectilínea para la discretización del contorno

→ analizado (figura 2). En lo que se refiere a la representación de las funciones se han supuesto constantes sobre cada elemento.

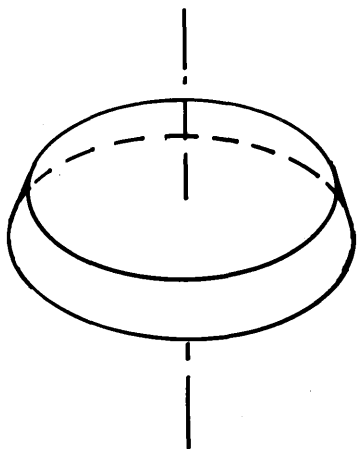


Fig. 2

La discretización del contorno  $\partial\Omega$  en elementos supone la sustitución de las integrales extendidas a  $\partial\Omega$  por un sumatorio de 1 a N.

Para el caso que estamos considerando  $C_{ik} = 1/2 \delta_{ik}$  (superficie suave) por lo que la ecuación (6) podemos escribirla

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \delta_{ik} u_i &= \sum_{i=1}^N \left[ \int_{\partial\Omega} U_{ik} t_i ds - \int_{\partial\Omega} T_{ij} u_j ds + \int_{\partial\Omega} E_{ik} x_i ds + \int_{\partial\Omega} F_k ds \right] \end{aligned} \quad (7)$$

o bien

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix} &= \sum_{n=1}^N \left[ \int_{\partial\Omega_n} \begin{bmatrix} u_{rr} & u_{zr} \\ u_{rz} & u_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r \\ t_z \end{bmatrix} (cdq)_n - \int_{\partial\Omega_n} \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{zr} \\ T_{rz} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix} (cdq)_n + \int_{\partial\Omega_n} \begin{bmatrix} E_{rr} & E_{zr} \\ E_{rz} & E_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ x_z \end{bmatrix} (cdq)_n + \int_{\partial\Omega_n} \begin{bmatrix} F_r \\ F_z \end{bmatrix} ds_m \right] \end{aligned} \quad (8)$$

La ecuación anterior representa un sistema de  $2N \times 2N$  ecuaciones una vez fijadas  $2N$  condiciones de contorno.

Calculados los desplazamientos la ecuación que nos permite calcular las tensiones puede expresarse en la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sum_{n=1}^N \left[ \int_{\partial\Omega_n} D_{ijk} t_k ds_n - \int_{\partial\Omega_n} D_{ijk} u_k ds_n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_{\partial\Omega_n} \left[ x_k H_{ij} - H_{ijk} x_{k,k} \right] n_k - \int_{\partial\Omega_n} x_k I_{ijk} ds_n \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Las expresiones (8) y (9) quedarían, escritas en forma mas compacta como:

$$\underline{B} \cdot \underline{u} = \underline{A} \cdot \underline{t} + \underline{P}$$

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{t} - \underline{S} \cdot \underline{u} + \underline{P}'$$

el cálculo de las matrices de las expresiones anteriores permitira resolver el problema.

#### CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE LAS MATRICES DE INFLUENCIA

El cálculo de los coeficientes de las matrices que aparecen en las expresiones (8) y (9) podría realizarse analíticamente pero debido a la profusa utilización de las funciones de Legendre, la obtención de las mismas por el citado procedimiento es casi imposible.

Por otra parte, no debemos olvidar las singularidades que aparecen en el cálculo de los tensores  $U_{ik}$  y  $T_{ik}$  cuando el punto de campo y tiende al punto de colocación; es necesario, por tanto, realizar con sumo cuidado el cálculo de estos coeficientes.

Dos casos diferentes pueden presentarse:

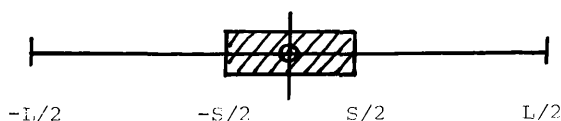
\* Si el Punto de Campo no coincide con el Punto de Colocación de la carga, el cálculo de los coeficientes se consigue mediante una cuadratura de Gauss

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_m} f ds_m &= \int_{-L/2}^{L/2} 2\pi r f dl = \int_{-1}^1 2\pi r f L/2 d\xi = \\ &= \pi L \sum_{k=1}^N \omega_k \cdot r(\xi_k) f(\xi_k) \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que las integraciones numéricas perderan precisión a medida que la distancia Pto. de Campo - Pto de Colocación disminuya, se procede a un proceso de integración adaptable, es decir, a la división del elemento en subelementos, de manera que el número de puntos de integración por elemento aumente.

Si el punto de colación coincide con el punto de campo, se ha utilizado un procedimiento semianalítico, que consiste en integrar analíticamente en una zona cercana a la singularidad donde las funciones de Legendre pueden expresarse en una forma relativamente sencilla, y realizar una integración numérica en el resto del elemento.

#### INTEGRACION NUMERICA



#### INTEGRACION ANALITICA

Fig. 3

#### RESULTADOS

##### Tubo Fisurado

La iniciación y desarrollo de una fisura en una estructura puede provocar su puesta fuera de servicio por lo que es necesario estudiar los efectos que este fenómeno produciría.

La distribución de tensiones en un punto a la fisura, es del tipo

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = -\frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

con un valor infinito en el borde de la fisura y donde K es el llamado "factor de intensificación" de tensiones.

Seguidamente vamos a estudiar el factor de intensificación en un tubo sometido a tracción con fisura exterior. El esquema del problema está representado en la figura (4).

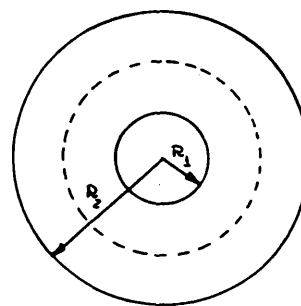
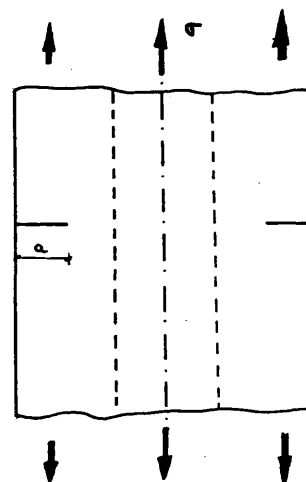


Fig. 4

En la figura (5) puede verse la discretización, así como las condiciones de contorno utilizadas para resolver el problema.

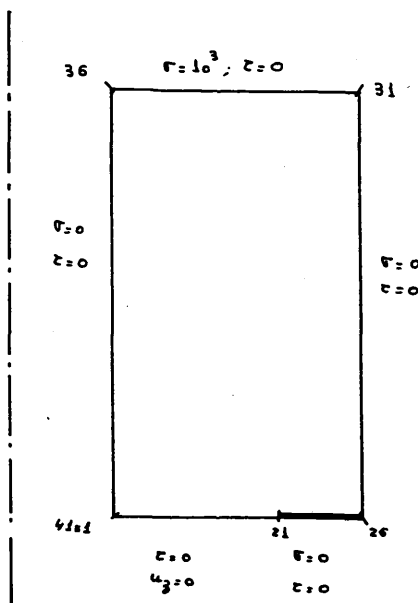


Fig. 5

Los resultados de las tensiones, obtenidos en elementos próximos al borde de la fisura se representan en la tabla (1)

NODO	DISTANCIA A LA FISURA (r)	$\sigma_z$	$\sigma_z \sqrt{r}$
20	0,5	6856,35	4848,17
19	1,5	2899	3550,54
18	2,5	2336,135	3693,75
17	3,5	2001,184	3743,87
16	4,5	1557,939	3304,89
15	5,5	1562,348	3664,03
14	6,5	1370,604	3494,37
13	7,5	1273,738	3488,28
12	8,5	1166,764	3401,67
11	9,5	1136,31	3502,34
10	10,5	908,003	2942,27
9	11,5	928,289	3147,98

Tabla 1.

El factor de intensificación se obtiene es  $K = 2908.372$ , lo que representa un error del  $4.05\%$  frente a la solución teórica, resultado suficientemente aceptable considerando la pobreza de la discretización utilizada.

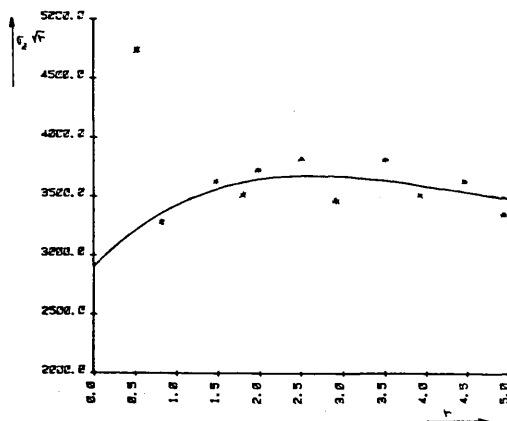


Fig. 6

Cilindro sometido a presión interna

Se va a estudiar en este ejemplo la determinación de los desplazamientos y tensiones en un cilindro de pared gruesa sometido a una presión interior  $P$ .

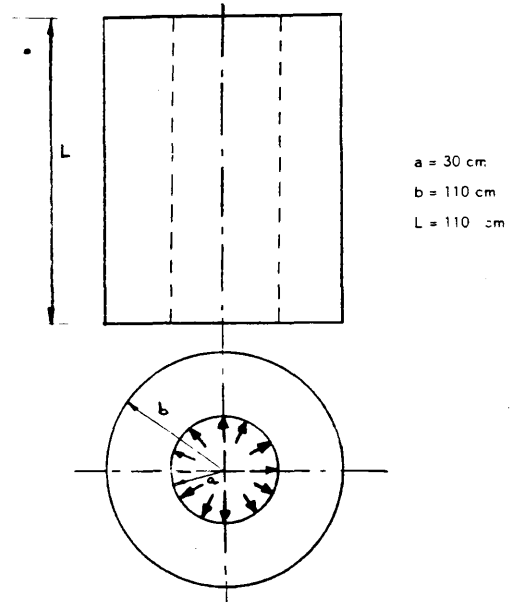


Fig. 7

En lo que se refiere a las características del material utilizado han sido las siguientes:

$$E = 2,5 \text{ Kg/cm}^2; \quad \nu = 0,25; \quad P = 10^3 \text{ Kg/cm}^2$$

La solución de este problema clásico (Lamé) puede encontrarse en 9.

En la figura (8) puede verse la discretiza-

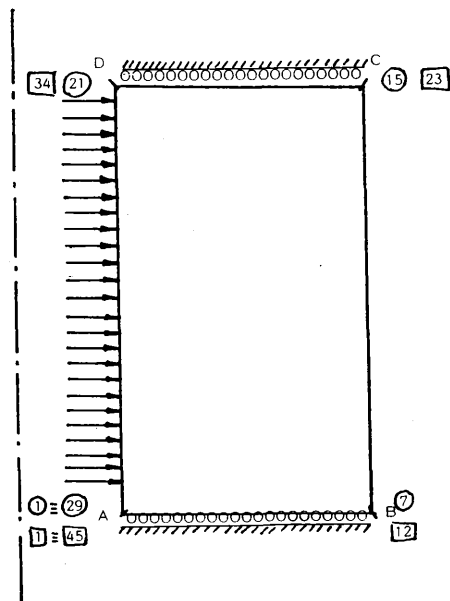


Fig. 8

ción, así como las condiciones de contorno utilizadas para resolver el problema.

Los nodos con  $\bigcirc$  en la figura (8) corresponden a la discretización con 28 elementos. Los indicados  $\square$  corresponden a la discretización con 44 elementos.

Los resultados obtenidos para las dos discretizaciones se indican en la Tabla - 2.

CARA	DISCRE	VARIABLE	SOL.OBTEN.	ERROR
AB=CD	28 Ele	$\sigma_z$	37,55	6,55 %
	44 Ele		40,27	0,22 %
BC	28 Ele	$u_r$	6680,75	7,97 %
	44 Ele		6627,18	7,11 %
DA	28 Ele	$u_r$	17362,5	4,04 %
	44 Ele		17200,91	3,08 %

Tabla 2.

#### REFERENCIAS

- Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (Edited by) "Handbook of Methemathical functions". - Dover Publications (1972)
- Alarcon, E. "Elasticidad Racional" S.P.E.T. S.I.I. Sevilla (1976)
- Alarcon, E. Doblaré, M. "Teoría de Plasticidad conceptos generales". S.P.E.T.S.I.I. - Madrid 1982
- Anza Aguirrezabala, J.J."El Método de los Elementos de Contorno en la Teoría de la Termoelasticidad". Tesis Doctoral Madrid - 1981
- Cathie, D.N. and Banerjee, P.K. "Numerical Solutions in Axisimetric Elastoplasticity by Boundary Element Method". Innovative Numerical Analysis in the Applied Engineering Sciences, Ed. R.P. Shaw et Al, pp 331-339 - 1980
- Cruse, T.A. Snow, D.W. and Wilson, R.B. - "Numerical Solutions in Axisimetric Elasticity", Computers and Structures, Vol 7 pp.- 445-451, 1977
- Doblaré, M. "Formulación Tridimensional del Método de los Elementos de Contorno con Interpolación Parabólica". Tesis Doctoral - E.T.S.I.I. Madrid (1981)
- Erderly I.A. et al. "Higher trascendental functions" Vol I. Bateman Manuscript Pro - yect Mc Graw Hill (1953)
- Feodosiev, V.I. "Resistencia de Materiales" Ed. Mir, Moscu .1980

- Fung, Y.C. "Foundations of Solid Mechanics". Prentice Hall. New Delhi 1968
- Garcia, F. "Formulación del Método de las Ecuaciones Integrales de contorno en Elastoplasticidad Tridimensional". Tesis Doctoral - E.T.S.I.I. Madrid 1981
- Gomez, M.S. "El Método de los Elementos de Contorno en Problemas Axisimétricos". Tesis Doctoral E.T.S.I.I. Madrid (1982)
- Love , A.E.H. "A Treatise on the Mathemati - cal Theory of Elasticity". Dover Publica - tions. 1940
- Paris, F."El Método de los Elementos de Con - torno en la Teoría del Potencial y la Elasti - cidad". Tesis Doctoral, E.T.S.I.I. Madrid - 1979
- Stroud, A.H. and Secrest, D. "Gaussian - Quadratura Formula". Prentice Hall 1966
- Timoshenko, S y Goodier, J.N. "Teoría de la Elasticidad". Ediciones Urmo 1972